

Die Verdoppelung des Würfels

Konstruktionsbeschreibung

für Programm Z.u.L. von René Grothmann
und für Schreibstift, Zirkel und Lineal ohne Maßeinteilung

von Peter Katzlinger, München, Januar 2013

Idee

Annäherungskonstruktion zur Vergrößerung der Seite vom Würfel 1 um Faktor $\approx \sqrt[3]{2}$, durch Anwendung des Strahlensatzes.

Besonderheit

- Die Konstruktion des Bruches ist analog zur Konstruktion „Die Kreiszahl Pi (π) auf einem Strahl dargestellt“

Ansatz

- Jeder unechte Bruch und jeder Dezimalbruch der die gewünschte Annäherung zu $\sqrt[3]{2}$ hat, ist anwendbar.
- Gewählter Bruch: 96.389 / 76.504, hat eine Differenz zu $\sqrt[3]{2} = 1,5128E-11$
=> Die Größe der Zeichenfläche bestimmt zum Teil auch die max. Anzahl der Dezimalstellen (Größe) des Bruches oder umgekehrt. Wird ein Bruch mit zu vielen Dezimalstrahlen gewählt, können die deshalb sehr eng platzierten Konstruktionspunkte nicht mehr unterschieden werden.
=> Für diese Konstruktion ist, wegen den Zahlen 4 und 389, daher eine Zeichenfläche Format DIN A0 sinnvoll.

Konstruktionsschritte mit => Begründung / Hinweise

Grundkonstruktion

- Strahl s1 ab Punkt A, Strecke A-B = Länge der Seite für Würfel 1 beliebig
=> grundsätzlich kann die Strecke A-B frei gewählt werden
=> A-B = 1 hat im Programm Z.u.L. den Vorteil, dass am Ende der Konstruktion die Strecke A-M den arithmetischen Wert für $\approx \sqrt[3]{2}$ ausweist.
- Quadrat mit Seite A-B (S1 Würfel 1) konstruieren
- Strahl s2 durch Punkt A, Winkel s1-A-s2 = 15°
=> 15° nicht erforderlich, aber vorteilhaft für eine kompakte Gesamtdarstellung
- Strecke A-C mit beliebiger Länge, vorteilhaft ca. 2,5 x A-B
- Punkt C mit B verbinden
- Strahl s3 parallel zu s1 durch C
- Strahl s4 senkrecht auf s3 durch Punkt C
- 10er Teilung auf s4, ergibt Punkt H und D
- Strahl s5 senkrecht auf s3 durch Punkt A, ergibt Punkt E
- 10er Teilung auf s5, mit gleichen Teilen wie auf s4, ergibt Punkt J und F
=> s4 und s5 sind Zahlenstrahlen für die geometrische Darstellung des Nenners und Zählers
- => Die Punkte H und J sind jeweils die 1. Teilungsstrecken
- Unterbrochener Strahl s6 durch s3 und H bis Punkt F auf s5 ergibt Knotenpunkt G
=> Vergrößert die Strecke C-H mit Faktor 10
- Unterbrochener Strahl s7 durch s3 und J bis Punkt D auf s4 ergibt Knotenpunkt I
=> Vergrößert die Strecke E-J mit Faktor 10
=> Die Unterbrechung der Strahlen bringt bessere Übersichtlichkeit
=> Die Knotenpunkte G und I ermöglichen die Proportionalität der Strahlen s4 u. s5 zueinander
- **Würfel 1 mit Seite A-B konstruieren**

Bruch 96.389 / 76.504 auf s4 konstruieren, Zähler / Nenner = 96.389 / 76.504 entspricht $\approx \sqrt[3]{2}$

- **Nenner auf s4 konstruieren**

- Start mit Einerstelle „4“
- Vom Punkt C aus den 4. Teilungsstrich mit „4“ bezeichnen
- Punkt 4 auf s4 mit Knotenpunkt I verbinden (Linie unterbrochen), ergibt 4 auf Strahl s5
 - => Strecke C-4 von s4 wird verkleinert
 - => Im Moment ist der Strahl s5 für Zehner zuständig
 - => Da die Zehnerstelle = 0, auf E-F keine Addition!
- Punkt 4 auf s5 mit Knotenpunkt G verbinden (Linie unterbrochen), ergibt 4 auf Strahl s4
 - => Strecke E-4 von s5 wird verkleinert
 - => Im Moment ist der Strahl s4 für Hunderter zuständig
- Punkt 4 auf s4 geometrisch vom 6. Teilstrich subtrahiert, ergibt $600 - 96 = 504$
 - => Subtraktion ermöglicht eine größere Zirkelöffnung
- Punkt 504 auf s4 mit Knotenpunkt I verbinden (Linie unterbrochen), ergibt 504 auf Strahl s5
 - => Strecke C-504 von s4 wird verkleinert
 - => Im Moment ist der Strahl s4 für Tausender zuständig
- Punkt 504 auf s5 geometrisch zum 6. Teilstrich addieren ergibt $6.000 + 504 = 6.504$
- u. s. w. bis
- sich auf der Strecke C-D die Strecke C-76.504 ergibt
 - => Nenner ist vollständig auf s4 konstruiert
- Punkt 76.504 mit Punkt A verbinden
 - => Strecke A-C ist proportional zur Strecke C-76.504
 - => Nenner 76.504 entspricht der „1“ im Bruch $\approx \sqrt[3]{2} / 1$

- **Zähler auf s4 konstruieren**

- Start mit Einerstelle „9“
- Vom Punkt C aus den 9. Teilungsstrich mit „9“ bezeichnen
- Punkt 9 auf s4 mit Knotenpunkt I verbinden (Linie unterbrochen), ergibt 9 auf Strahl s5
 - => Strecke E-9 von s4 wird verkleinert
 - => im Moment ist der Strahl s5 für Zehner zuständig
- Punkt 9 auf s5 geometrisch zum 8. Teilstrich addieren ergibt $80 + 9 = 89$
- Punkt 89 auf s5 mit Knotenpunkt G verbinden (Linie unterbrochen), ergibt 89 auf Strahl s4
 - => Strecke C-89 von s5 wird verkleinert
 - => im Moment ist der Strahl s4 für Hunderter zuständig
- Punkt 89 auf s4 geometrisch zum 3. Teilstrich addieren ergibt $300 + 89 = 389$
- Punkt 389 auf s4 mit Knotenpunkt I verbinden (Linie unterbrochen), ergibt 389 auf Strahl s5
 - => Strecke C-389 von s4 wird verkleinert
 - => im Moment ist der Strahl s4 für Tausender zuständig
- Punkt 389 auf s5 geometrisch zum 6. Teilstrich addieren ergibt $6.000 + 389 = 6.389$
- u. s. w. bis
- sich auf der Strecke C-D die Strecke C-96.389 ergibt
 - => Zähler ist vollständig auf s4 konstruiert
- Parallele zur Strecke A-76.504 durch Punkt 96.389 und Strahl s2 ergibt Punkt K
 - => Strecke C-K ist proportional zur Strecke C-96.389
 - => Zähler 96.389 entspricht $\approx \sqrt[3]{2}$ im Bruch $\approx \sqrt[3]{2} / 1$
- Strecke A-K auf s2 übertragen ab Punkt C, ergibt Punkt L auf s2
- Unterbrochene Parallele zur Strecke C-B durch L schneidet s1 in M
- **Strecke A-M = Seite vom Würfel 2 = 96.389 / 76.504 $\approx \sqrt[3]{2}$**

- **Würfel 2 mit Seite A-M konstruieren**

- **Hinweise:**

- Hat eine Dezimalstelle den Wert „0“, ist auf dem betreffenden Strahl keine Addition möglich. Es folgt eine Verbindung mit dem gegenüberliegenden Knotenpunkt und anschließend die Addition zur nächsten Dezimalstelle.
- Liegt ein konstruierter Punkt vor der Addition zur letzten Dezimalstelle auf Strahl s5, wird dieser Punkt mittels einer Parallele auf Strahl s4 übertragen. Anschließend erfolgt die abschließende Addition zum fertig konstruierten Nenner bzw. Zähler.